



منصة زاد أكاديمي
الدورة الأسطورية في المراجعة النهائية
BAC 2023



إختبار مادة:

الإسم:

الموضوع رقم: 01 / 10 مواضيع

اللقب:

ورقة الإجابة

التمرين الأول:

$$u_0 = 3 \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{5} \quad \text{① حساب الحدود لدينا}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{3} \quad u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{2}$$

البرهان بالتراجع على أن $u_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لدينا $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ موقوفة. ②

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفرض صحة $P(n)$ ، $u_n > 1$ ومنه $u_n^2 > 1$

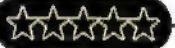
$$\text{ومنه } \frac{u_n^2 + 1}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad \text{ومنه } \sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}} > 1 \quad \text{ومنه } u_{n+1} > 1$$

ومنه $P(n+1)$ موقوفة.

$$\text{② لإتجاه تغير } (u_n) \text{ ليكن } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n)(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n)}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n} = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - \frac{2u_n^2}{2}}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$$

$$= \frac{1 - u_n^2}{2(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n)} \quad \text{③}$$



عبر بالتجرب على
درجة صعوبة التمرين
وشاركها معنا
في السطور



التمرين الأول



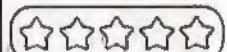
التمرين الثاني



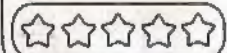
التمرين الثالث



التمرين الرابع



التمرين الخامس



حمل
التطبيق

①

هذا الفرق له زمين إيجابية $1 - U_n^2$ لأن $\ell(\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} + U_n) > 0$ لدينا $U_n > 1$ ومنه $U_n^2 > 1$ ومنه $-U_n^2 < -1$ ومنه $1 - U_n^2 < 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n < 0$ إذن (U_n) متناقصة تماماً على \mathbb{N}

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

نضع $f(l) = l$ حيث f الدالة المرفوعة بـ (U_n)

$$1 + l^2 = 2l^2 \text{ ومنه } \frac{1+l^2}{2} = l^2 \text{ ومنه } \sqrt{\frac{1+l^2}{2}} = l$$

$$l = 1 \text{ ومنه } 1 = l^2$$

$$U_n > 1 \text{ مرفوعة لأن } l = -1$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

(3) أ- المتتالية (V_n) محدودة أساساً لأن $\frac{1}{2}$

$$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+U_n^2}{2} - \frac{2}{2} \text{ ليكن } n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{U_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} (U_n^2 - 1) = \frac{1}{2} V_n$$

$$V_0 = U_0^2 - 1 = 8 \text{ لأن } V_0 =$$

$$V_n = V_0 \times q^n \text{ حيث } q = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U_n = \sqrt{V_n + 1} \text{ ومنه } U_n^2 = V_n + 1 \text{ لدينا } V_n = U_n^2 - 1$$

$$U_n = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 1$$

$$-1 < q < 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2 \quad \text{تجميع المصاحف}$$

$$= V_0 + 1 + V_1 + 1 + \dots + V_n + 1 \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + 1 + 1 + \dots + 1 \quad \text{مع } n+1 \text{ مرة } U_n^2 = V_n + 1$$

$$= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \times (n+1) \quad (0,25)$$

$$= 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n+1$$

$$T_n = 8 + 2V_1 + 2^2V_2 + \dots + 2^nV_n$$

$$= 8 + 8 + \dots + 8 \quad \text{مع } n+1 \text{ مرة } n \in \mathbb{N}$$

$$= 8(n+1) \quad (0,25) \quad 2^n V_n = 2^n \times 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 8$$

$$L_n = L_n(V_0) + L_n(V_1) + \dots + L_n(V_n)$$

$$= \frac{(L_n(8) + L_n(8) + n L_n(\frac{1}{2})) (n+1)}{2} \quad \text{مع } n+1 \text{ مرة } n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{(2 L_n(8) + n L_n(\frac{1}{2})) (n+1)}{2} = \underline{L_n(8) + n L_n(\frac{1}{2})} \quad L_n(V_n) = L_n\left(8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$(0,25)$$

لأن L_n هو مجموع
 $n+1$ حدًا متتالية
 حسابية حد الأول هو $L_n(8)$
 أساسها هو $L_n(\frac{1}{2})$

التمرين الثاني :

1- أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (0, 1)$$

قانون الإحصاء :

x_i	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

(1)

عدد الحالات الممكنة
 $C_{10}^2 = 45$

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_2^2 + C_1^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{45}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

$$P(X=1) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = \frac{20}{45}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P_i = \frac{63}{45} \quad (0, 1) \quad \text{الأصل الرياضي}$$

$$\approx 1,4$$

$$A_{10}^2 = 90 \quad (0,15)$$

(2) أ - عدد الحالات = العينة :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2A_5^1 A_3^1 + 2A_5^1 A_2^1 + 2A_3^1 A_2^1}{A_{10}^2} \quad (0,75)$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{6}{90} \quad (0,75)$$

$$(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$$

التصريف الثالث

①/ I حل المعادلة : نضع

$$\begin{cases} z+2-3i=0 \dots (1) \\ z^2-2z+10=0 \dots (2) \end{cases} \quad (0,75)$$

$$z_1 = -2+3i \quad \text{من } (1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 10 = -36 \quad \text{من } (2) \text{ لدينا}$$

$$(6i)^2 = -36 \quad \text{لدينا}$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_3 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ and } z_1$$

$$= \frac{2-6i}{2} = 1-3i \quad \left. \vphantom{\frac{2-6i}{2}} \right\} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i} \quad \text{لدينا } \frac{1}{1} \quad \text{II}$$

$$= \frac{-6i}{-3} = 2i \quad (0,25)$$

$$|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\arg(i) = \theta \text{ نضع}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ومنه}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } (0, 2\pi)$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ب) التحويل T الذي يوصل A إلى B هو تشابه مباشر

مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته 2 .

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\vec{CA}, \vec{CB}) \text{ لأن}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} = 2 \text{ و } (0, 2\pi)$$

$$\underline{CB} = 2\underline{CA} \text{ ومنه } (0, \pi)$$

ومنه المثلث ABC مثلث قائم في C .

بما أن ABC مثلث قائم في C فإن النقط A, B, C

تنتمي إلى دائرة (T) قطرها $[AB]$

أو مركزها Ω حيث Ω منتصف $[AB]$ $(0, 2\pi)$

$$z_{\Omega} = \frac{z_B + z_A}{2} = \frac{-2 + 3i + 1 - 3i}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|1 - 3i + 2 - 3i|}{2} = \frac{|3 - 6i|}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

2 أ- لتكن M نقطة من المستوى لادقها Z

نضع $\frac{|Z-Z_A|}{|Z-Z_C|} = 1$ ومنه $\frac{|Z_M-Z_A|}{|Z_M-Z_C|} = 1$ ومنه $\frac{AM}{CM} = 1$

ومنه $AM = CM$ ومنه (Δ) هي محور $[AC]$ آ

ب - صورة (Δ) بواسطة التناظر المباشر (T) هي (Δ')

بما أن $T(A) = B$ $T(C) = C$

ومنه $T([AC]) = [BC]$ آ

ومن (Δ') هو محور القطعة المستقيمة $[BC]$

3 أ- C مرجع $\{(A, 1), (B, 1), (D, -1)\}$

معناه أن : $Z_C = \frac{Z_A + Z_B - Z_D}{1}$

ومنه $Z_D = Z_A + Z_B - Z_C$ آ
 $= -2 - 3i$

D نظيرة C بالنسبة إلى Ω معناه أن Ω هي منتصف $[CD]$ آ
 وهذا معناه لأن

$\frac{Z_C + Z_D}{2} = \frac{1 + 3i - 2 - 3i}{2} = -\frac{1}{2} = Z_\Omega$ آ

الرابعي $ADCB$ هو مستطيل لأن :

$\vec{Z}_{AC} = Z_C - Z_A = 1 + 3i + 2 - 3i = 3$ لأن آ

$\vec{Z}_{DB} = Z_B - Z_D = 1 - 3i + 2 + 3i = 3$
 ومنه $\vec{AC} = \vec{DB}$ (هو متوازي وأما)

وبما أن $(A \subsetneq B) \quad A^c = \mathbb{R} \setminus B$

ولذلك $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

التمرين الرابع :

$$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$$

(1) أ- نصايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - x^2 e^{-x+1} - e^{-x+1}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{x^2}{e^x} \cdot e - e^{-x+1} \right] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{x^2}{e^x} \cdot e - e^{-x+1} \right] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

ب- المشتقة : f دالة قابلة للاستغاث على \mathbb{R} ، ولذا من أجل $x \in \mathbb{R}$ كل

$$f'(x) = 1 - (2x e^{-x+1} - e^{-x+1} (x^2 + 1))$$

$$= 1 - 2x e^{-x+1} + e^{-x+1} (x^2 + 1)$$

$$= 1 + (x^2 - 2x + 1) e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ كل $f'(x) > 0$ لأن $e^{-x+1} > 0$ ، $(x-1)^2 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ومن ثم f دالة متزايدة على \mathbb{R}

2) (أ) (Δ) مستقيم معكاً، بافتراض (f) بجوار $+\infty$ لأن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x^2+1)e^{-x+1}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x^2}{e^x} \cdot e - e^{-x+1} \right] = 0$$

وصفة (f) بالنسبة إلى (Δ)

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$$

وهذا (f) تحت (Δ) على \mathbb{R}

3) المعادلة $f(x) = 0$ لا يحلها، وصفاً $1,8 < x < 1,9$ لأن $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ و f مستمرة ومتزايدة تماماً على \mathbb{R} وحسب م ق م يتحقق المطلوب.

4) معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الإحداثيات $(1, f(1))$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= x - 1 - 1$$

$$= x - 2$$

$$f(1) = -1$$

$$f'(1) = 1$$

5) المشتقة الثانية ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - e^{-x+1}(x-1)^2$$

$$= (x-1)(2-x+1)e^{-x+1} = (x-1)(3-x)e^{-x+1}$$

$$= -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$

$$f(0) = -2$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$

f'' ايجابية وغيرت
أشارتها عند 1 و 3

(f) يتغير تخطيطي انطوائ
حكما $A(1, -1)$
 $B(3, f(3))$

(A_m): $y = x + m$ (Cf) المعادلة $f(x) = x + m$ حلولها هي عوامل نقطة تقاطع

$m \in]-\infty, -e[$ المعادلة تقبل حلًا واحدًا سالبًا.

" " " " " $m = -e$

0,5

" " " " $m \in]-e, 0[$ موجب

$m \in [0, +\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولاً

(III) 1 - الدالة G دالة أصلية لـ $x \mapsto x e^{-x+1}$ لأن

$$G'(x) = - \left(e^{-x+1} - e^{-x+1} (x+1) \right) \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{من أجل كل}$$

$$= -e^{-x+1} + x e^{-x+1} + e^{-x+1}$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx = [G(x)]_0^1 \quad 0,5$$

$$= G(1) - G(0) = -e + e = e - e$$

(2) ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$$

$$= \left[-x^{n+1} e^{-x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1) x^n e^{-x+1} dx$$

$$= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$$

$$= -1 + (n+1) I_n \quad 0,5$$

$$I_2 = -1 + 2 I_1 = -1 + 2(e - e) = 2e - 5$$

0,25

$$S = \int_0^1 (y - f(x)) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)} e^{-x+1} dx$$

$$\textcircled{0,95} = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$$

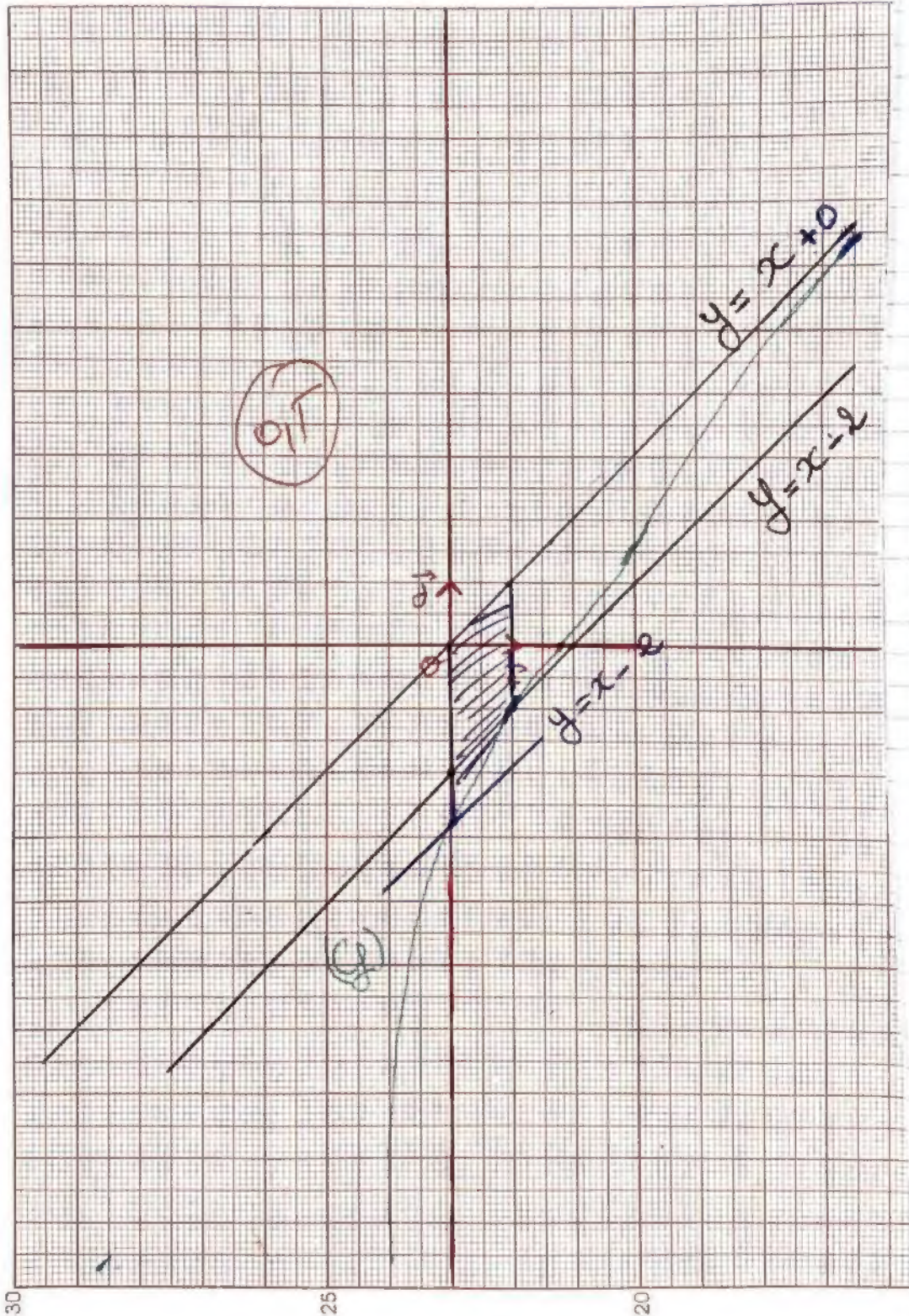
$$= I_2 + \left[-e^{-x+1} \right]_0^1$$

$$= I_2 + (-1 + e) = 2e - 5 - 1 + e$$

$$= 3e - 6 \text{ (u.a.)}$$

$$S = \int_0^1 (y - f(x)) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)} e^{-x+1} dx$$

$$\therefore = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$$



$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{التعريف 05}$$

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1 \quad \text{(I) أ - حساب الحدود : (01)}$$

$$P(n) \quad u_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N} \quad \text{ب - البرهان بالتراجع أن لكل } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{لدينا } u_0 = 0 = 2^0 - 1 \text{ ومنه } P(0) \text{ صحيحة}$$

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}, \text{ نفرض } P(n) \text{ أي أن } u_n = 2^n - 1$$

$$\text{ومنه } 2u_n = 2^{n+1} - 2 \quad \text{ومنه } 2u_n + 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ومنه } u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ومنه } P(n+1) \text{ صحيحة. (01.75)}$$

$$w_n = 2^n$$

$$v_n = u_n + 3$$

$$(w_n) \text{ هندسية لأن } w_{n+1} = 2w_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$w_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2w_n \quad \text{(01.5)}$$

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = w_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \quad \text{(01.25)}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n & v_n &= u_n + 3 \\ &= w_0 + 2 + w_1 + 2 + \dots + w_n + 2 & &= 2^n - 1 + 3 \\ &= w_0 + w_1 + \dots + w_n + 2 + 2 + \dots + 2 & &= 2^n + 2 \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2(n+1) = 2^{n+1} + 2n + 1 & &= w_n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (925) S''_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n & u_n &= 2^n - 1 \\ &= w_0 - 1 + w_1 - 1 + \dots + w_n - 1 & &= w_n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 - 1 \times (n+1) = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

القيمة الممكنة لـ $\text{PGcd}(u_n, v_n)$ هي 1 و 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} d | u_n \\ d | v_n \end{array} \right. \text{ ومنه } d | 2^n - 1 \text{ ومنه } d | 2^n + 2$$

$$d | 2^n + 2 - (2^n - 1) \text{ ومنه } d | 3$$

ومنه $d | 3$.

سواء قسمة 2^n على 3.

$$\text{لدينا } 2^0 \equiv 1 [3] \text{ و } 2^1 \equiv 2 [3] \text{ و } 2^2 \equiv 1 [3]$$

هذه السواء دورية ودورها 2. إذا كان $n = 2k$ فإن $2^n \equiv 1 [3]$
إذا كان $n = 2k+1$ فإن $2^n \equiv 2 [3]$

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نضع $v_n \equiv 0 [3]$ تكافئ $2^n + 2 \equiv 0 [3]$

تكافئ $2^n \equiv -2 [3]$ ومنه $2^n \equiv 1 [3]$

ومنه $n = 2k$

إذا كان $n = 2k+1$ فإن 3 لا يقسم v_n ومنه في هذه

$$\text{الحالة } \text{PGcd}(u_n, v_n) = 1$$

ومنه u_n و v_n أوليان فيما بينهما

وإلا فقط إذا كان $n = 2k+1$

(3) ليكن $n \in \mathbb{N}$ نضع $S_n \equiv S'_n [3]$ تكافئ $2^{n+1} - 2 \equiv 2^{n+1} + 2n + 1 [3]$

تكافئ $-3n - 3 \equiv 0 [3]$ تكافئ $3 | -3(n-1)$

أي